Géométrie différentielle et physique

A.B.

La géométrie différentielle s'intéresse à la notion d'espace ou de forme géométrique lisses, c'est-à-dire infiniment différentiables et localement euclidiens.
La structure différentielle s'ajoute à la structure topologique de l'espace.
L'étude de la topologie de l'espace peut s'aborder par le biais de la topologie algébrique qui entretient de profondes relations avec la géométrie différentielle.
La topologie algébrique a pour but de définir des invariants algébriques des espaces topologiques comme la cohomologie de De Rham ou l'homologie singulière qui permettent une classification des espaces topologiques dans la mesure où ils restent inchangés après déformations continues.
La géométrie différentielle étudie plutôt la structure différentielle qui peut être mise sur la topologie. Certaines singularités des variétés différentielles peuvent s'étudier en mathématiques et en physique. Un trou noir en relativité générale est une métrique de Schwarzschild ou de Kerr en géométrie. De même, le Big-Bang ou le Big-Crunch sont des singularités soit originelle soit finale.
Un domaine connexe à la géométrie différentielle est la géométrie algébrique qui étudie les variétés algébriques ou les schémas, dont les équations sont intrinsèquement polynômiales.
On peut distinguer plusieurs domaines dans la géométrie différentielle :

a) Les géométries riemannienne, hyperboliques et lorentzienne qui s'attachent à la notion de métrique, c'est-à-dire de distance, et de courbure de l'espace.
b) La géométrie symplectique qui étudie les variétés symplectiques et est liée à la mécanique hamiltonienne.
c) La géométrie spinorielle qui étudie les spineurs et l'opérateur de Dirac et est liée au spin des particules.
d) Les théories Yang-Mills qui considèrent des connexions sur des fibrés et sont liées à la physique des particules.
e) Les supersymétries de la physique et les supervariétés qui considèrent des relations d'anticommutation des fermions.