La géométrie symplectique

La géométrie symplectique étudie les variétés symplectiques. Une variété symplectique est une variété différentielle munie d'une forme symplectique. Une forme symplectique w est une 2-forme extérieure fermée et non-dégénérée. w est dite fermée si :

$$dw=0$$

Avec d, la différentielle sur les formes extérieures.

w est dite non-dégénérée si elle induit un isomorphisme entre le tangent et son dual.

On définit un crochet de Poisson sur les fonctions par la formule :

$$\{f,g\}=w(df^*,dg^*)$$

Du fait que w est fermée, on déduit l'identité de Jacobi :

$$\{f,\{g,h\}\}=\{\{f,g\},h\}+\{g,\{f,h\}\}$$

Un champ de vecteur hamiltonien est X_f tel que $X_f=df^*$, avec f une fonction. On a :

$$[X_f,X_g]=X_{\{f,g\}}$$

La dynamique est engendrée par un Hamiltonien H selon l'équation portant sur les fonctions :

$$df/dt=\{f,H\}$$

Un problème essentiel en physique est de quantifier les structures symplectiques.

On recherche un espace de Hilbert et un opérateur hamiltonien H tel que la dynamique sur les opérateurs soit :

$$dA/dt=[A,H]$$

Les fonctions sont remplacées par des observables qui sont des opérateurs hermitiens.

Dans le cas des variétés symplectiques, il existe une construction géométrique de la quantification qui s'appelle la quantification géométrique de Kostant-Souriau.

On suppose que w soit le représentant d'une classe de cohomologie entière et on construit le fibré en droites complexe associé. La quantification est donnée par l'espace de Hibert des sections du fibré avec une connexion D telle que :

$$D_f D_g- D_g D_f= D_{\{f,g\}}+i\{f,g\}$$

A.B.