La géométrie riemannienne

La géométrie riemannienne a pour objet l'étude des variétés riemanniennes, c'est-à-dire des variétés différentielles munies d'une métrique riemannienne g qui est une forme bilinéaire définie positive sur l'espace tangent de la variété.
L'existence d'une métrique riemannienne permet de définir les géodésiques qui minimisent la longueur des courbe entre deux points, la longueur d'une courbe étant l'intégrale le long de la courbe de la norme du vecteur tangent à la courbe. Les géodésiques donnent une distance sur la variété.
Une métrique riemannienne implique l'existence d'une connexion dite de Levi-Civita qui est intrinsèquement définie par le fait qu'elle conserve la métrique et est de torsion nulle.
La variété riemannienne possède une courbure riemannienne qui décrit la forme de la variété et est définie par la connexion de Levi-Civita D :

$$R(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$$

Cette courbure riemannienne peut se contracter par la métrique pour donner la courbure de Ricci qui est un endomorphisme symétrique de l'espace tangent.
On peut dès lors écrire les équations d'Einstein :

$$Ric = r\, Id$$

Une variété vérifiant ces équations est qualifiée de variété d'Einstein.
La trace de la courbure de Ricci est la courbure scalaire qui est constante si la variété est d'Einstein.
Il existe aussi une courbure appelée courbure sectionnelle qui est définie pour les plans de l'espace tangent :

$$K(X,Y) = r(X,Y,X,Y) \;/\; [\, g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 \,]$$

Avec $r(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T)$
La métrique riemannienne permet un calcul tensoriel utilisé en physique de la Relativité Générale.

A.B.